

|             |   |
|-------------|---|
| Title       | $L^2$ - TORSION OF A SURFACE BUNDLE OVER $S^1$ AND A HYPERBOLIC VOLUME(II) (Hyperbolic Spaces and Discrete Groups II) |
| Author(s)   | 北野, 晃朗; 森藤, 孝之; 高沢, 光彦  |
| Citation    | 数理解析研究所講究録 (2002), 1270: 24-28  |
| Issue Date  | 2002-06   |
| URL         | <a href="http://hdl.handle.net/2433/42167">http://hdl.handle.net/2433/42167</a>                                       |
| Right       |   |
| Type        | Departmental Bulletin Paper   |
| Textversion | publisher   |

# $L^2$ -TORSION OF A SURFACE BUNDLE OVER $S^1$ AND A HYPERBOLIC VOLUME (II)

東工大・理工 北野晃朗 (Teruaki Kitano)

Tokyo Institute of Technology

東京農工大・工 森藤孝之 (Takayuki Morifuji)

Tokyo Univ. of Agriculture and Technology

東工大・情報理工 高沢光彦 (Mitsuhiko Takasawa)

Tokyo Institute of Technology

## はじめに

古典的な Reidemeister torsion と Ray-Singer の analytic torsion が等価であるという Cheeger, Müller による結果を雛形として, 現在ではその  $L^2$ -版が確立されています. 特に有限体積をもつ 3 次元双曲多様体に対しては,  $L^2$ -torsion は双曲体積と本質的に等しいことが示されています. Mostow の剛性定理によれば, 基本群はその双曲体積の情報をすべて含んでいることとなりますが, Lück による  $L^2$ -torsion の明示公式 [6] は, これを体現化したものとみなすことができます. しかしながら, 具体的計算を実行するという意味でまだ難しい課題が残されていると思われます.

結び目補空間に対する Kashaev 予想 (体積予想) は, 双曲体積を結び目の Kashaev 不変量 (colored Jones 多項式) の漸近挙動で記述するというものでした [7]. これを逆手にとってみると, 体積に収束していくような「何らか」の近似列が (Kashaev 不変量とは異なる極限をとるという意味において) 他にも存在するのでは, という素朴な疑問が生じます.

本研究の目標は, 扱う対象を  $S^1$  上の曲面束の構造をもつ 3 次元多様体に限った場合に, 上記「何らか」の近似列を  $L^2$ -torsion を用いて構成し (ここで構成されるものたちはもとの  $L^2$ -torsion よりも具体的計算がしやすくなると期待されるものになっている), その不変量たちの極限として双曲体積をとらえる枠組みを与えることです.

本稿は, 昨年度の研究集会「双曲空間及び離散群の研究」での報告以後の進展を紹介することを目的とし, 重複をさけて  $L^2$ -torsion その他の定義については省略することにします. 詳しくは文献 [6], [2] および [3] を参照して

## $L^2$ -torsion と体積予想

$\varphi$  をモノドロミーとする  $S^1$  上の曲面束を  $W_\varphi$  で表します. 技術的な理由から, ファイバーは境界成分を一つもつコンパクトな曲面  $\Sigma_{g,1}$  とします. このとき  $W_\varphi$  の基本群  $\pi_1 W_\varphi$  は, ファイバーの基本群  $\pi_1 \Sigma_{g,1} \cong F_{2g}$  (階数  $2g$  の自由群) と円周の基本群  $\mathbb{Z}$  との半直積に同型になります. より具体的に  $F_{2g} = \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle$  とすれば,  $\pi = \pi_1 W_\varphi$  の表示として次が得られます:

$$\pi = \langle x_1, \dots, x_{2g}, t \mid r_i = tx_i t^{-1} (\varphi_*(x_i))^{-1}, 1 \leq i \leq 2g \rangle.$$

ここで  $\varphi_* : \pi_1 \Sigma_{g,1} \rightarrow \pi_1 \Sigma_{g,1}$  は,  $\varphi$  から誘導される準同型写像を表します. 関係子  $r_1, \dots, r_{2g}$  に自由微分を施すことにより, Alexander-Fox 行列

$$A = \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M(2g, \mathbb{Z}\pi)$$

が得られます. この場合に  $L^2$ -torsion  $\tau(W_\varphi)$  を具体的に与える Lück の明示公式を書き下すと次のようになります:

$$\log \tau(W_\varphi) = -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi}(A).$$

ただし,  $\det_{\mathbb{C}\pi}$  は Fuglede-Kadison 行列式とよばれているもので, 非可換環 ( $\pi$  の群環  $\mathbb{Z}\pi$ ) 係数の行列に対して定義される通常とは異なる行列式を表します. 成分の非可換性から, これは計算機による数値実験も困難な対象と言えます.

ここで  $L^2$ -torsion の基本的かつ重要な性質を二つ挙げておきます:

- (i)  $\widetilde{W} \rightarrow W$  を  $n$  重被覆とすると,  $\log \tau(\widetilde{W}) = n \log \tau(W)$ .
- (ii)  $W \cong \Sigma_{g,1} \times S^1$  (自明な曲面束) ならば,  $\log \tau(W) = 0$ .

**注意 1.** ファイバーが閉曲面  $\Sigma_g$  の場合, 対応する曲面束  $W_\varphi$  は, Heegaard 分解からくる基本群の表示として

$$\pi_1 W_\varphi = \langle x_1, \dots, x_{2g}, t \mid r_i = 1, [x_1, x_{g+1}] \cdots [x_g, x_{2g}] = 1 \rangle$$

を持ちます. この場合の Lück の公式は, 形式的には境界をもつ場合と全く同じ形になりますが [6], Fuglede-Kadison 行列式をとる際の係数環が変わり, その値は境界付きの場合と一般には異なります.

Lück の公式を, 「ファイバーの基本群へのモノドロミーの作用が  $W_\varphi$  の  $L^2$ -torsion (双曲的体積) を決めている」と解釈することになると, 以下のようして  $L^2$ -torsion の近似列を構成することができます.

自由群  $\Gamma = F_{2g}$  の降中心化列

$$\Gamma_1 = \Gamma \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$$

を考えます. ただし  $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_k, \Gamma_1]$  で定義します. さらに  $\Gamma$  の冪零商  $N_k = \Gamma/\Gamma_k$  および自然な射影  $p_k: \Gamma \rightarrow N_k$  を考えます.  $p_k$  から誘導される群環上の写像  $p_{k*}: \mathbb{C}\pi \rightarrow \mathbb{C}\pi(k)$  を用いて

$$A_k = \left( p_{k*} \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \in M(2g, \mathbb{C}\pi(k))$$

とします. ここで,  $\pi(k)$  は商群  $\pi/\Gamma_k$  を表します. そこで  $k$  番目の  $L^2$ -torsion を

$$\log \tau_k(W_\varphi) = -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi(k)}(A_k)$$

により「定義」します. つまり, 曲面群の降中心化列へのモノドロミーの作用を見ることにより, もとの  $L^2$ -torsion を近似する不変量の無限列を構成するわけです. その構成の仕方から, このように「定義」された不変量 (体積もどき) たちは, 素朴な意味でもとの  $L^2$ -torsion を近似していると考えられます. 以上をまとめると次の予想が得られます.

**予想 2.** すべての  $k \geq 1$  に対して  $\log \tau_k$  は well-defined であり

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \log \tau_k = \log \tau$$

が成り立つ.

現在のところ, 上記予想が肯定的に解決されているのは次の場合です.

**定理 3.**  $S^1$  方向の適当な有限被覆をとると  $W_{\varphi^n} \cong \Sigma_{g,1} \times S^1$  となる曲面束  $W_\varphi$  に対して,  $\log \tau_k(W_\varphi) = 0$  ( $k \geq 1$ ) が成り立つ.

この場合, もとの  $L^2$ -torsion も  $\log \tau(W_\varphi) = 0$  をみたしているのです (自明な値ですが) 不変量の系列の極限として体積が復元されたことになります. また, 結び目の体積予想が肯定的に解決されているトーラス結び目の場合 [1] と比較してみると, Kashaev 不変量 (漸近挙動は多項式オーダー) と我々の不変量の挙動が大きく異なることがわかります.

## いくつかの公式

前節で導入した不変量の系列のうち、最初の二項については明示公式を与えることができます. そこで、他変数 Laurent 多項式  $F(t) \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$  に対して、その Mahler 測度を

$$m(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log \left| F(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_n}) \right| d\theta_1 \cdots d\theta_n$$

により定義します.

**定理 4.** 一番目の不変量  $\tau_1$  は well-defined で

$$\log \tau_1(W_\varphi) = -2m(\Delta_{\varphi_*})$$

が成り立つ. ただし、 $\Delta_{\varphi_*}(t) = \det(tI - \varphi_*)$  および  $\varphi_* \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  を表す. 特に、 $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g} \in \mathbb{C}$  を  $\varphi_*$  の固有値とすると

$$\log \tau_1(W_\varphi) = -2 \sum_{i=1}^{2g} \log \max\{1, |\alpha_i|\}$$

が成り立つ.

上記定理中の二つ目の記述から、次の系が得られます.

**系 5.** ホモロジー表現  $\varphi_* \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  の固有値がすべて 1 の冪根である必要十分条件は

$$\log \tau_1(W_\varphi) = 0.$$

で与えられる.

種数 1 の場合には、曲面束が双曲構造を許容するかどうかの情報が、一番目の不変量に完全に反映されることがわかります.

二番目の不変量については、種数が 1 のときとそれ以上の場合とで、振る舞いが大きく異なります.

まず種数が 1 の場合、閉曲面  $\Sigma_1$  から構成された曲面束に対する Lück の公式に帰着させることにより、次がわかります.

**定理 6.** ファイバーの種数が 1 の曲面束  $W_\varphi$  に対して、 $\log \tau_2(W_\varphi) = 0$  が成

一方種数が 2 以上の場合には, トレリー群のマグナス表現を用いることにより, 二番目の不変量の明示公式を与えることができます.

**定理 7.** 曲面  $\Sigma_{g,1}$  のホモロジーに自明に作用するモノドロミー  $\varphi$  に対応する曲面束  $W_\varphi$  に対して,  $\log \tau_2(W_\varphi)$  は well-defined であり

$$\log \tau_2(W_\varphi) = -2m(\Delta_{\rho(\varphi)})$$

が成り立つ. ただし  $\Delta_{\rho(\varphi)}$  はマグナス表現  $\rho(\varphi) \in GL(2g, \mathbb{Z}N_2)$  の特性多項式を表す.

一番目の不変量のときのような有限和の公式は存在しませんが, 不変量の消滅の必要十分条件を記述することはできます. これにより, 二番目の不変量も非自明な不変量であることがわかります.

## References

- [1] R.M. Kashaev and O. Tirkkonen, *A proof of the volume conjecture on torus knots*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 269 (2000), Vopr. Kvant. Teor. Polya i Stat. Fiz. 16, 262–268, 370.
- [2] 北野晃朗, 高沢光彦, 森藤孝之,  *$L^2$ -torsion of a surface bundle over  $S^1$  and a hyperbolic volume*, 数理解析研究所講究録 No. 1223 (2001), 93–106.
- [3] T. Kitano, T. Morifuji and M. Takasawa,  *$L^2$ -torsion invariants of a surface bundle over  $S^1$* , preprint (2001).
- [4] T. Kitano, T. Morifuji and M. Takasawa, *Numerical calculation of  $L^2$ -torsion invariants*, preprint (2002).
- [5] T. Kitano, T. Morifuji and M. Takasawa,  *$L^2$ -torsion invariants and homology growth of a torus bundle over  $S^1$* , preprint (2002).
- [6] W. Lück,  *$L^2$ -torsion and 3-manifolds*, Proc. Low-Dimensional Topology, ed. by K. Johanson, Internat. Press (1994), 75–107.
- [7] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. 186 (2001), 85–104.